
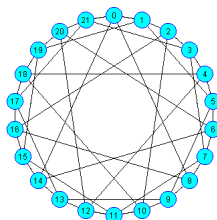


Program Współpraca Polska-RPA	RAPORT CZĄSTKOWY z realizacji projektu w ramach programu międzynarodowego Polska-RPA			 Narodowe Centrum Badań i Rozwoju
	Nr raportu	IR-RATfor5G-08		
Data aktualizacji raportu:	2020.09.13	Wersja	5	
Numer umowy	PL-RPA2/02/RATfor5G+/2019	Akronim	RATfor5G+	
Okres realizacji projektu	od	2019.01.01	do	2022.06.30
Tytuł projektu	Technologie dostępu radiowego dla standardu 5G i przyszłych generacji sieci bezprzewodowych			
Tytuł raportu	Parametry transmisyjne sieci przedstawionych za pomocą grafów (Przygotowany do publikacji)			

1. Wstęp

Aby systemy teleinformatyczne mogły spełnić wciąż rosnące wymagania dotyczące zapewnienia odpowiedniej jakości, szybkości i niezawodności przesyłania informacji, przy projektowaniu tych systemów należy wziąć pod uwagę, obok doboru sprzętu instalowanego w węzłach, również konfigurację połączeń sieciowych realizowanych pomiędzy elementami składowymi tych systemów.

Struktury systemów teleinformatycznych mogą być opisywane przy pomocy grafów. Wierzchołkami tych grafów (węzłami) mogą być moduły komutacyjne lub specjalizowane komputery, zaś krawędzie to, najczęściej dwukierunkowe, niezależne kanały transmisyjne tworzące sieć łączącą te wierzchołki. W rozbudowanych sieciach telekomunikacyjnych, jako medium transmisyjne najczęściej stosowane są kable światłowodowe, a z reguły sieci te posiadają strukturę pierścieniową. Parametry transmisyjne standardowego pierścienia nie są zadowalające, zatem, aby je polepszyć, dokonuje się modyfikacji ich topologii poprzez wprowadzenie dodatkowych połączeń międzywęzłowych zwanych cięciwami. Otrzymane w ten sposób struktury połączeń nazwano pierścieniami cięciwowymi .



Rys. 1. Przykładowy graf cięciwowy czwartego stopnia

Definicja 1

Pierścień cięciwowy jest to szczególny przypadek grafu kołowego (*Circulant Graph*) zdefiniowanego przez parę (p, Q) , gdzie p oznacza liczbę węzłów, zaś Q zbiór cięciw, $Q \subseteq \{1,$

$2, \dots, \lfloor p/2 \rfloor$. Każda z cięciw $q_i \in Q$ łączy parę węzłów należących do pierścienia, przy czym q_i oznacza długość tej cięciwy równą liczbie krawędzi pierścienia pomiędzy tymi węzłami. Pierścień cięciwowy opisywany jest notacją $G(p; q_1, \dots, q_i)$, przy czym $q_1 = 1 < q_2 < \dots < q_i$. Stopień węzłów z zasady jest równy $d(V) = 2i$, poza przypadkiem, gdy długość cięciwy wynosi $p/2$, w tym przypadku p jest parzyste, a stopień węzła wynosi $2i-1$.

Z wielu publikacji wynika, że istotny wpływ na własności transmisyjne sieci modelowanej przy pomocy grafów ma ich średnica i średnia długość 'ścieżki. Poniżej podano definicje tych parametrów.

Definicja 2

Średnica grafu $D(G)$ jest to najdłuższa ścieżka spośród ścieżek minimalnej długości łączących dowolnie wybrane dwa węzły grafu:

$$D(G) = \max_{v_i, v_j} \{d_{\min}(v_i, v_j)\} \quad (1)$$

gdzie v_i, v_j oznaczają numery węzłów, $d_{\min}(v_i, v_j)$ – długość minimalnej ścieżki (liczba krawędzi) łączącej węzły v_i, v_j .

Definicja 3

Średnia długość ścieżki w grafie jest określona wzorem:

$$d_{av} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} d_{\min}(v_i, v_j) \quad (2)$$

gdzie d_{\min} oznacza minimalną liczbę krawędzi pomiędzy węzłami v_i, v_j , przy czym $i \neq j$, natomiast N – liczbę węzłów tworzących graf.

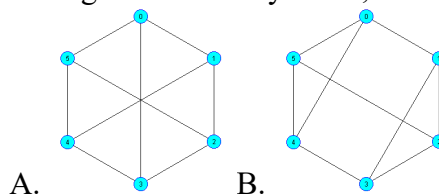
Aby ocenić obiektywnie zdefiniowane powyżej parametry bazowe analizowanych struktur połączeń międzywęzłowych, zdefiniowano parametry grafów odniesienia, które nazwano Grafami Referencyjnymi.

Definicja 4

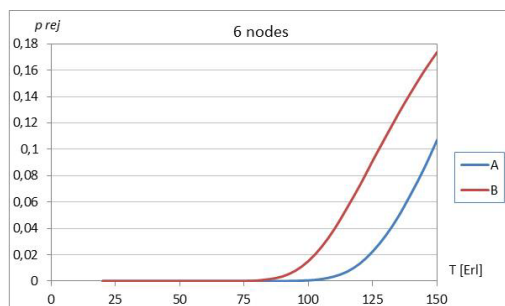
Grafami Referencyjnymi nazywane są struktury regularne o założonej liczbie węzłów, w których wartości średnicy i średniej długości ścieżki, wyznaczone z dowolnie wybranego węzła źródłowego, osiągają te same, teoretycznie obliczone, dolne granice wielkości.

W pracy opisano metodę wyszukiwania tego typu struktur. Przeprowadzone zostały wstępne badania symulacyjne otrzymanych grafów, modelując przy ich pomocy wirtualne sieci telekomunikacyjne. Testy te polegały na ocenie prawdopodobieństwa odrzucenia realizacji zgłoszenia w funkcji natężenia generowanego ruchu.

W wyniku przeprowadzonych badań stwierdzono, że pomimo tej samej liczby węzłów i jednakowych wielkości średnicy i średniej długości ścieżek Grafów Referencyjnych, w niektórych przypadkach parametry transmisyjne tych grafów różnią się między sobą. Przykładem takim są Grafy Referencyjne sześciowęzłowe trzeciego stopnia (rys. 1), których średnica równa jest 2, a średnia długość ścieżki wynosi 1,4.



Rys. 2. Referencyjne Grafy sześciowęzłowe



Rys. 3. Wyniki symulacji prawdopodobieństwa odrzucenia realizacji połączenia w funkcji natężenia ruchu

Otrzymane wyniki stały się inspiracją do wykonania analiz mających na celu wyjaśnienie kwestii, co jest przyczyną pojawienia się tych różnic. Postanowiono określić cechy mogące mieć wpływ na to zjawisko. Założono, że czynnikiem takim może być liczba wykorzystania poszczególnych krawędzi grafu.

2. Analiza wpływu liczby wykorzystania poszczególnych krawędzi grafu na własności transmisyjne sieci

W celu przeprowadzenia koniecznych badań opracowano narzędzie programowe umożliwiające wyznaczenie liczby wykorzystania poszczególnych krawędzi grafu, czyli ile razy będą one elementami ścieżek minimalnej długości łączących wszystkie wierzchołki grafu.

Jako przykład uzyskanych wyników w tabeli 1 pokazano rezultaty obliczeń wykorzystania poszczególnych krawędzi sześciowęzłowych grafów A i B pokazanych na rys. 2.

Tabela 1. Liczba użycia poszczególnych krawędzi analizowanych grafów

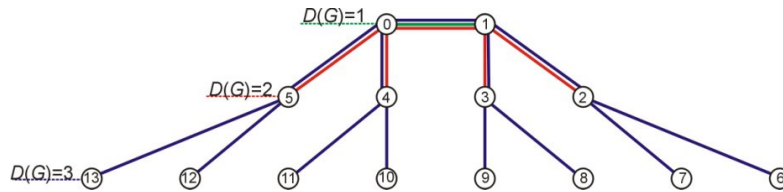
A	Nu						B	Nu					
	0	1	2	3	4	5		0	1	2	3	4	5
0		5		5		5	0		5			3	3
1	5		5		5		1	5		3	3		
2		5		5		5	2		3		3		5
3	5		5		5		3		3	3		5	
4		5		5		5	4	3			5		3
5	5		5		5		5	3		5		3	

Wartości pokazane w kolumnach *Nu* określają liczbę wykorzystania danej krawędzi do realizacji wymiany informacji pomiędzy każdą parą węzłów za pośrednictwem ścieżki o najmniejszej długości.

Jak to wynika z tabeli 1, rozkłady użycia poszczególnych krawędzi w badanych grafach

różnią się. Przykładowo - w grafie A krawędź 1-2 będzie wykorzystywana pięciokrotnie, natomiast w grafie B - trzykrotnie.

Założono, że istnieje ściśle określona, maksymalna liczba wykorzystania dowolnej krawędzi badanych grafów w zależności od ich średnicy oraz stopnia węzłów. Aby wyznaczyć tę liczbę posłużono się analizą, której zasadę zilustrowano na rys. 4, gdzie dla wirtualnego grafu o stopniu węzłów $d(V) = 3$ i maksymalnej długości ścieżek $l = 3$, określono L_{max} - maksymalną liczbę użycia krawędzi 0-1.



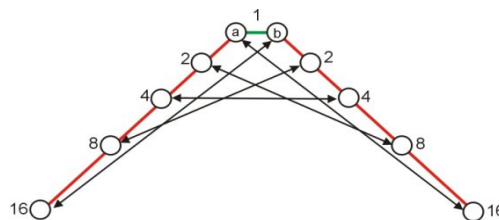
Rys. 4. Ilustracja metody wyznaczania wartości L_{max}

Z rys. 4 wynika, że jeśli długość ścieżki l , w której skład wchodzi krawędź 0-1 wynosi 1, wówczas zostanie ona wykorzystana jeden raz (kolor zielony), jeśli $l = 2$, to wystąpi ona czterokrotnie w ścieżkach 0-1-2, 0-1-3, 1-0-4, 1-0-5 (kolor czerwony); natomiast gdy $l = 3$, wówczas krawędź ta wystąpi w ścieżkach o długości 3 dwanaście razy: 0-1-2-6, 0-1-2-7, 0-1-3-8, 0-1-3-9, 1-0-4-10, 1-0-4-11, 1-0-5-12, 1-0-5-13, 4-0-1-2, 4-0-1-3, 5-0-1-2, 5-0-1-3 (kolor granatowy).

Sumując otrzymane liczby użycia krawędzi 0-1 wyznaczona zostaje wartość L_{max} charakterystyczna dla drzewa o danym stopniu węzłów i długości ścieżek.

W rozpatrywanym przypadku będzie ona wynosić: gdy $l = 1$ wówczas $L_{max} = 1$, jeśli $l = 2$ - $L_{max} = 5$, a gdy $l = 3$ - $L_{max} = 17$.

Aby określić liczbę ścieżek o zadanej długości L_l , w których występuje wybrana krawędź dla dowolnie wybranego stopnia węzła i średnicy grafu, wykorzystując omówioną wyżej zasadę, opracowano algorytm, którego uproszczony schemat pokazano na rys. 5.



Rys. 5. Zasada wyznaczania wartości L_l dla trzeciego stopnia węzłów, gdy średnica grafu wynosi 5

Na rysunku strzałkami zaznaczono ścieżki o długości 5, w których skład wchodzi krawędź $a-b$, natomiast podane wartości określają liczbę węzłów łączonych tymi ścieżkami.

Na sumaryczną liczbę ścieżek o długości równej 5, w których skład wchodzi krawędź $a-b$, składają się:

- 32 ścieżki łączące węzły grafu oddalone od węzłów a lub b o 5 krawędzi;
- 32 ścieżki z węzłów odległych od wspomnianych węzłów o 4 krawędzie;
- 16 ścieżek z węzłów odległych o 3 krawędzie.

Zatem sumaryczna liczba ścieżek o długości L_{max5} wynosi 80.

Uogólniając, dla dowolnego stopnia wężła, liczba ścieżek o długości l , w których skład wchodzi wybrana krawędź, jest określona wzorem:

$$L_l = \sum_1^l (n_l \cdot n_1 + n_{l-1} \cdot n_2 + \dots + n_2 \cdot n_{l-1} + n_1 \cdot n_l) \quad (3)$$

gdzie L_l oznacza sumaryczną liczbę ścieżek o długości l , natomiast n_i - połowę liczby węzłów równoodległych od bardziej oddalonego od nich wężła należącego do wybranej krawędzi grafu.

W tabeli 2 podano wyznaczone przykładowe rozkłady wykorzystania krawędzi grafu w funkcji długości ścieżek i stopnia wężłów.

Tabela 2. Rozkłady wykorzystania krawędzi grafu w funkcji długości ścieżek i stopnia wężłów

$d(V)$	l	L_l	$d(V)$	l	L_l
3	1	1	5	1	1
	2	4		2	8
	3	12		3	48
	4	32		4	256
	5	80		5	1280
	l	$l \cdot 2^{l-1}$		l	$l \cdot 4^{l-1}$
4	1	1	6	1	1
	2	6		2	10
	3	27		3	75
	4	108		4	500
	5	405		5	3125
	l	$l \cdot 3^{l-1}$		l	$l \cdot 5^{l-1}$

Z tabeli 2 wynika, że, dla grafu dowolnego stopnia, liczba użycia wybranej krawędzi w funkcji długości ścieżek łączących wężły tego grafu, jest określona wyrażeniem:

$$L_l = l \cdot (d(V) - 1)^{l-1} \quad (4)$$

Korzystając z otrzymanych wyników podanych w tabeli 2 określono sumaryczne, maksymalne liczby użycia wybranego łącza L_{max} w funkcji wielkości średnicy Grafu Referencyjnego przy założonym stopniu wężłów. Wyniki obliczeń podano w tabeli 3.

Tabela 3. Maksymalna liczba użycia wybranej krawędzi grafu L_{max} w funkcji wielkości jego średnicy przy założonym stopniu wężłów

$d(V)$	$D(G)$	$L_{\max D(G)}$	$d(V)$	$D(G)$	$L_{\max D(G)}$
3	1	1	4	1	1
	2	5		2	7
	3	17		3	34
	4	49		4	142
	5	129		5	547
	k	$2^k(k-1)+1$		$k > 1$	$k \cdot 3^{k-1} + L_{\max(k-1)}$

$d(V)$	$D(G)$	$L_{\max D(G)}$	$d(V)$	$D(G)$	$L_{\max D(G)}$
5	1	1	6	1	1
	2	9		2	11
	3	57		3	86
	4	313		4	586
	5	1593		5	3711
	$k > 1$	$k \cdot 4^{k-1} + L_{\max(k-1)}$		$k > 1$	$k \cdot 5^{k-1} + L_{\max(k-1)}$

Uogólniając, maksymalna, sumaryczna liczba wykorzystania danej krawędzi grafu regularnego stopnia $d(V) > 3$, w funkcji jego średnicy, jest dana wzorem rekurencyjnym:

$$L_{\max D(G)} = D(G) \cdot (d(V) - 1)^{k-1} + L_{\max(D(G)-1)} \quad (5)$$

Analiza otrzymanych wyników umożliwiła zdefiniowanie ogólnego wzoru na wielomiany opisujące rozkłady użycia poszczególnych krawędzi w funkcji średnicy grafu oraz stopnia jego węzłów, co pozwala na określenie maksymalnej liczby użycia wybranej krawędzi, wchodzącej w skład ścieżek łączących węzły.

$$L_{\max D(G)d(V)} = D(G)(d(V)-1)^{D(G)-1} + (D(G)-1)(d(V)-1)^{D(G)-2} + \dots + 2(d(V)-1) + 1 \quad (6)$$

W tabeli 4 podano przykłady wielomianów opisujących rozkłady użycia poszczególnych krawędzi grafów w funkcji ich średnicy dla stopnia węzłów $d(V) > 2$.

Tabela 4. Wielomiany opisujące rozkłady użycia poszczególnych krawędzi w funkcji średnicy grafów

$D(G)$	Wielomian
2	$2(d(V)-1)+1$

3	$3(d(V)-1)^2 + 2(d(V)-1) + 1$
4	$4(d(V)-1)^3 + 3(d(V)-1)^2 + 2(d(V)-1) + 1$
5	$5(d(V)-1)^4 + 4(d(V)-1)^3 + 3(d(V)-1)^2 + 2(d(V)-1) + 1$
6	$6(d(V)-1)^5 + 5(d(V)-1)^4 + 4(d(V)-1)^3 + 3(d(V)-1)^2 + 2(d(V)-1) + 1$
7	$7(d(V)-1)^6 + 6(d(V)-1)^5 + 5(d(V)-1)^4 + 4(d(V)-1)^3 + 3(d(V)-1)^2 + 2(d(V)-1) + 1$
8	$8(d(V)-1)^7 + 7(d(V)-1)^6 + 6(d(V)-1)^5 + 5(d(V)-1)^4 + 4(d(V)-1)^3 + 3(d(V)-1)^2 + 2(d(V)-1) + 1$

Rezultaty obliczeń otrzymane dzięki przeprowadzonej analizie dają sumę wykorzystania danej krawędzi we wszystkich ścieżkach minimalnej długości, również równoległych.

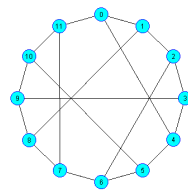
Opracowano prosty algorytm umożliwiający znalezienie wszystkich najkrótszych równoległych dróg łączących dwa dowolnie wybrane węzły grafu opisującego sieć transmisyjną.

Dla wyjaśnienia metody postępowania posłużono się macierzą sąsiedztwa.

Definicja 5

Macierz sąsiedztwa $[M_S]$ jest macierzą kwadratową indeksowaną wierzchołkami grafu, której elementy określają przyległość między sobą (incydencję) jego węzłów. Jeśli element macierzy sąsiedztwa występujący na przecięciu i -tego wiersza i j -tej kolumny przyjmuje wartość jeden, to oznacza, że w grafie istnieje krawędź łącząca węzły i -ty z j -tym, zaś gdy przyjmuje on wartość zero, oznacza to brak takiej krawędzi. W przypadku, gdy krawędzie posiadają wagi, element macierzy występujący na przecięciu i -tego wiersza i j -tej kolumny przyjmuje wartość wagi $w_{(i-j)}$, a w przypadku braku krawędzi wartość ∞ .

Poniżej podano przykład takiej macierzy opisującej połączenia w grafie pokazanym na rys. 6.



Rys. 6. Graf Referencyjny zbudowany z 12 węzłów

$$M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Na podstawie macierzy sąsiedztwa utworzono tabelę pomocniczą (tabela 5) służącą do identyfikacji krawędzi wchodzących w skład ścieżek.

Tabela 5. Tabela pomocnicza

		x										
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
4	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
6	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
9	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
11	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
Wynik												

Dla wybranego węzła źródłowego określany jest zbiór węzłów sąsiednich, z którymi jest on połączony ścieżkami o długości jednej krawędzi. W tym celu wypisywane są współrzędne xy elementów tabeli równe 1, które odpowiadają tym krawędziom.

W przypadku węzła źródłowego nr 0 są to krawędzie (kolor żółty):

0-1, 0-4, 0-11.

Następnie wyszukiwane są ścieżki składające się z dwóch krawędzi. W wierszu węzła źródłowego analizie poddawane są elementy kolumn, których wartości są równe 0 (kolumna dotycząca węzła źródłowego jest pomijana).

W tabeli 5 są to elementy kolumn 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (kolor czerwony).

Z kolei dokonywane jest sprawdzenie, czy w komórkach kolumn węzłów oddalonych od węzła źródłowego o jedną krawędź występuje wartość 1. Jeśli zachodzi ten fakt, to oznacza, że dana krawędź jest składową ścieżki składającej się z minimum dwóch krawędzi.

W przykładzie sprawdzane są komórki kolumn o numerach 1, 4 oraz 11. W ten sposób zostały wyznaczone krawędzie: 1-2, 1-8, 4-3, 4-5, 11-7, 11-10, które po połączeniu z krawędziami wybranymi

wcześniej, tworzą ścieżki o długości 2 łączące węzeł zerowy z następującymi węzłami grafu (kolor zielony):

0-1-2, 0-1-8, 0-4-3, 0-4-5, 0-11-7, 0-11-10.

Następnie sprawdzane są wiersze odpowiadających węzłom 2, 8, 3, 5, 7 oraz 10 i postępując według omówionej wyżej metody, pomijając węzły połączone z węzłem źródłowym ścieżkami o mniejszej długości, wyznaczony jest zbiór najkrótszych ścieżek o długości 3 (kolor niebieski):

0-1-2-6, 0-1-8-9, 0-4-3-9, 0-4-5-6, 0-11-7-6, 0-11-10-9.

Gdyby średnica grafu byłaby większa, wówczas działanie algorytmu byłoby kontynuowane do momentu, gdy zostanie stwierdzone, że wszystkie kolejno wybierane węzły źródłowe są połączone ze wszystkimi pozostałymi węzłami docelowymi.

W tabeli 6 pokazano otrzymany zbiór wszystkich najkrótszych ścieżek łączących węzły tworzące analizowany graf.

Tabela 6. Zbiory ścieżek łączących wszystkie węzły tworzące graf (rys. 6)

Nr węzła	Długość ścieżki		
	1	2	3
0	0-1, 0-4, 0-11	0-1-2, 0-1-8, 0-4-3, 0-4-5, 0-11-7, 0-11-10	0-1-2-6, 0-1-8-9, 0-4-3-9, 0-4-5-6, 0-11-7-6, 0-11-10-9
1	1-0, 1-2, 1-8	1-0-4, 1-0-11, 1-2-3, 1-2-6, 1-8-7, 1-8-9	1-0-4-5, 1-0-11-10, 1-2-6-5, 1-8-9-10
2	2-1, 2-3, 2-6	2-1-0, 2-1-8, 2-3-4, 2-3-9, 2-6-5, 2-6-7	2-1-0-11, 2-3-9-10, 2-6-5-10, 2-6-7-11
3	3-2, 3-4, 3-9	3-2-1, 3-2-6, 3-4-0, 3-4-5, 3-9-8, 3-9-10	3-2-6-7, 3-4-0-11, 3-9-8-7, 3-9-10-11
4	4-0, 4-3, 4-5	4-0-1, 4-0-11, 4-3-2, 4-3-9, 4-5-6, 4-5-10	4-0-1-8, 4-0-11-7, 4-3-9-8, 4-5-6-7
5	5-4, 5-6, 5-10	5-4-0, 5-4-3, 5-6-2, 5-6-7, 5-10-9, 5-10-11	5-4-0-1, 5-6-2-1, 5-6-7-8, 5-10-9-8
6	6-2, 6-5, 6-7	6-2-1, 6-2-3, 6-5-4, 6-5-10, 6-7-8, 6-7-11	6-2-1-0, 6-2-3-9, 6-5-4-0, 6-5-10-9, 6-7-8-9, 6-7-11-0
7	7-6, 7-8, 7-11	7-6-2, 7-6-5, 7-8-1, 7-8-9, 7-11-0, 7-11-10	7-6-2-3, 7-6-5-4, 7-8-9-3, 7-11-0-4
8	8-1, 8-7, 8-9	8-1-0, 8-1-2, 8-7-6, 8-7-11, 8-9-3, 8-9-10	8-1-0-4, 8-7-6-5, 8-9-3-4, 8-9-10-5

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Jedyną do tej pory znaną strukturą tego typu, poza regularnymi grafami pełnymi, jest graf Petersena (rys. 7, tabela 10).

Bardziej formalną metodą wyznaczania częstości użycia poszczególnych krawędzi w ścieżkach minimalnej długości jest wykorzystanie zasady mnożenia macierzy.

By wyjaśnić tryb dalszego postępowania posłużono się przykładem grafu sześciowęzłowego, a konkretnie grafu B pokazanego na rys. 2.

Dla wybranej liczby węzłów tworzona jest macierz pierwotna opisująca wszystkie krawędzie tworzące graf.

W rozpatrywanym przykładzie macierz pierwotna posiada następującą postać:

$$[M_k] = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c & d & e \\ a & 0 & f & g & h & i \\ b & f & 0 & j & k & l \\ c & g & j & 0 & m & n \\ d & h & k & m & 0 & o \\ e & i & l & n & o & 0 \end{bmatrix}$$

Elementy przekątnej macierzy są równe 0, gdyż nie odpowiadają one żadnej z krawędzi.

Analizowany graf jest opisany macierzą sąsiedztwa:

$$[M_s] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dokonywana jest transformacja macierzy pierwotnej, mająca na celu eliminację krawędzi, które w danym przypadku nie występują.

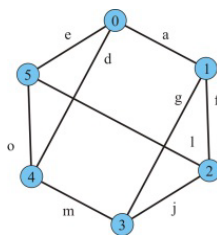
$$[M_{ktr}] = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & d & e \\ a & 0 & f & g & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & j & 0 & l \\ 0 & g & j & 0 & m & 0 \\ d & 0 & 0 & m & 0 & o \\ e & 0 & l & 0 & o & 0 \end{bmatrix}$$

Krawędziom analizowanego grafu przypisywane są nazwy wynikające z przeprowadzonej transformacji macierzy (tabela 11, rys. 8).

Tabela 11. Oznaczenie krawędzi grafu

Krawędź	0-1	0-4	0-5	1-2	1-3	2-3	2-5	3-4	4-5
---------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Nazwa	a	d	e	f	g	j	l	m	o
-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---



Rys. 8. Opis krawędzi grafu

Wykonywane jest mnożenie macierzy $[M_{ktr}]$ i przez wektory $\langle w_i \rangle$ opisujące połączenie wybranego wężła z pozostałymi wierzchołkami grafu.

W tabeli 12 pokazano otrzymane wyniki tych operacji, które obrazują konfiguracje wszystkich ścieżek składających się z dwóch krawędzi.

W wierszach wyróżnionych żółtym kolorem podano sumę elementów różnych od zera, które określają liczbę ścieżek składających się z dwóch krawędzi, a kolorem zielonym zaznaczono ścieżki wykorzystujące krawędź a .

Tabela 12. Konfiguracja ścieżek składających się z dwóch krawędzi

Węzeł 0						Węzeł 1						Węzeł 2					
							aa			ad	ae						
aa		af	ag									fa		ff	fg		
							ff		fj		fl						
							gg	gj		gm			ig	ij		im	
dd			dm		do												
ee		el		eo								le		ll		lo	
0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
Numer węzła docelowego																	
3	0	2	2	1	1	0	3	1	1	2	2	2	1	3	1	2	0
Węzeł 3						Węzeł 4						Węzeł 5					
							da			dd	de		ea			ed	ee
ga		gj	gg														
	fj		jj		jl								lf		lj		ll
							mg	mj		mm							
md			mm		mo							od			om		oo

						<i>oe</i>		<i>ol</i>		<i>oo</i>							
0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
Numer węzła docelowego																	
2	1	1	3	0	2	1	2	2	0	3	1	1	2	0	2	1	3

Przykładowo węzeł 0 jest połączony z węzłem nr 2 ścieżkami składającymi się z krawędzi *a* i *f* oraz *e* i *l*.

Dla upewnienia się, że tryb postępowania jest poprawny, obliczono drugą potęgę macierzy sąsiedztwa, która określa sumaryczną liczbę ścieżek łączących węzły grafu.

$$[M_s]^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Z tabeli 12 wynika, że każda z krawędzi w występuje w różnych konfiguracjach dziesięciokrotnie. Kolejną operacją jest wyznaczenie liczby użycia poszczególnych krawędzi grafu w ścieżkach minimalnej długości. W tym celu z tablicy eliminowane są kolumny dotyczące tych węzłów, które są połączone z węzłem źródłowym krótszymi ścieżkami, a także te, które odnoszą się do ścieżek łączących dany węzeł ze sobą samym.

Tabela 13. Użycie krawędzi w ścieżkach minimalnych o długości dwa

Węzeł 0						Węzeł 1						Węzeł 2							
										<i>ad</i>	<i>ae</i>								
		<i>af</i>	<i>ag</i>									<i>fa</i>			<i>fg</i>				
											<i>fl</i>								
										<i>gm</i>								<i>jm</i>	
			<i>dm</i>																
		<i>el</i>										<i>le</i>							<i>lo</i>
0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5		
Numer węzła docelowego																			
Węzeł 3						Węzeł 4						Węzeł 5							
							<i>da</i>						<i>ea</i>						
<i>ga</i>																			
					<i>jl</i>								<i>lf</i>		<i>lj</i>				

							<i>mg</i>	<i>mj</i>									
<i>md</i>						<i>mo</i>									<i>om</i>		
								<i>ol</i>									
0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
Numer wężła docelowego																	

W tabeli 13 przedstawiono otrzymane wyniki, a liczby użycia poszczególnych krawędzi w ścieżkach minimalnej długości podano w tabeli 14.

Tabela 14. Rozkład użycia krawędzi w badanym grafie

Długość ścieżki	Krawędź								
	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>j</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>o</i>
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	8	4	4	4	4	4	8	8	4

Stwierdzono, że otrzymane wyniki podane w tabeli 14 są skorelowane z rezultatami przeprowadzonych symulacji, podczas których zaobserwowano nierównomierny rozkład wykorzystania poszczególnych krawędzi grafu. Przykładowy ich rozkład ten pokazano w tabeli 15.

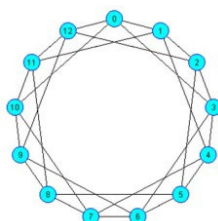
Tabela 15. Rozkład wykorzystania krawędzi grafu

Krawędź	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>j</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>o</i>
u_{is}	120261 7	799051	800364	800866	800474	798222	120046 2	119981 1	800459
Σ	10	6	6	6	6	6	10	10	6

W tabeli 15 w wierszu u_{is} podano liczbę użycia danej krawędzi w trakcie symulacji, a wiersz Σ określa sumaryczną liczbę wykorzystania krawędzi w grafie.

W trakcie dokonywania licznych eksperymentów znaleziono przypadki, które zaprzeczyły temu, że istnieje bezpośredni związek rozkładu użycia krawędzi z wynikami uzyskanymi w trakcie symulacji.

Przykładem takim jest graf pokazany na rys. 9, który nie jest wprawdzie Grafem Referencyjnym, ale stanowi dobrą ilustrację do rozważań.



Rys. 9. Obraz przykładowego grafu czwartego stopnia

Dla wszystkich krawędzi rozkład ich użycia jest jednakowy, natomiast wartości wykorzystania krawędzi wynikające z rezultatów symulacji nie są takie same (tabela 16).

Tabela 16. Zestawienie wyników symulacji

Numer krawędzi	Długość ścieżki			U_{is}	Numer krawędzi	Długość ścieżki			U_{is}
	1	2	3			1	2	3	
0	2	12	18	228702	13	2	12	18	284288
1	2	12	18	284566	14	2	12	18	228983
2	2	12	18	284413	15	2	12	18	284518
3	2	12	18	229321	16	2	12	18	228660
4	2	12	18	228820	17	2	12	18	284879
5	2	12	18	284509	18	2	12	18	228999
6	2	12	18	284032	19	2	12	18	284366
7	2	12	18	228873	20	2	12	18	229187
8	2	12	18	285658	21	2	12	18	283939
9	2	12	18	284735	22	2	12	18	229155
10	2	12	18	228362	23	2	12	18	284866
11	2	12	18	284337	24	2	12	18	229167
12	2	12	18	229031	25	2	12	18	229808

Poszukując czynnika umożliwiającego wyznaczenie rozkładu wykorzystania krawędzi, stwierdzono, że jest on uzależniony od liczby użycia krawędzi w ścieżkach równoległych.

Czynnik ten nazwany w_{spi} określony jest formułą:

$$w_{spi} = \sum_{i=1}^{D(G)} u_{io}, \quad (12)$$

a wartości u_{io} są obliczane ze wzoru:

$$u_{io} = \frac{u_l}{l} \quad (13)$$

gdzie u_l oznacza liczbę określającą użycie krawędzi w ścieżkach równoległych o długości l .

W tabeli 17 podano wyznaczone wartości współczynników w_{spi} dla analizowanego grafu.

Tabela 17. Wyznaczone wartości współczynnika w_{spi}

Krawędź	u_l						w_{spi}	Krawędź	u_l						w_{spi}
	1	2	3	4	5	6			1	2	3	4	5	6	
0	2	4	8	0	0	18	9,667	13	6	4	4	0	0	18	12,333
1	6	4	4	0	0	18	12,333	14	2	4	8	0	0	18	9,667
2	6	4	4	0	0	18	12,333	15	6	4	4	0	0	18	12,333
3	2	4	8	0	0	18	9,667	16	2	4	8	0	0	18	9,667
4	2	4	8	0	0	18	9,667	17	6	4	4	0	0	18	12,333
5	6	4	4	0	0	18	12,333	18	2	4	8	0	0	18	9,667
6	6	4	4	0	0	18	12,333	19	6	4	4	0	0	18	12,333
7	2	4	8	0	0	18	9,667	20	2	4	8	0	0	18	9,667
8	6	4	4	0	0	18	12,333	21	6	4	4	0	0	18	12,333
9	6	4	4	0	0	18	12,333	22	2	4	8	0	0	18	9,667
10	2	4	8	0	0	18	9,667	23	6	4	4	0	0	18	12,333
11	6	4	4	0	0	18	12,333	24	2	4	8	0	0	18	9,667
12	2	4	8	0	0	18	9,667	25	2	4	8	0	0	18	9,667

Obliczając sumę liczb użycia krawędzi podczas przeprowadzonych symulacji i dzieląc ją przez sumę obliczonych współczynników, a następnie mnożąc otrzymany wynik przez współczynnik wyznaczony dla danej krawędzi, uzyskano wyniki zgodne z rozkładem użycia krawędzi wyznaczonym w trakcie symulacji (14).

$$u_{io} = w_{spi} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} u_{is}}{\sum_{i=0}^N w_{spi}} \quad (14)$$

gdzie u_{io} oznacza obliczoną liczbę wykorzystania krawędzi.

W rozpatrywanym przykładzie:

$$\sum_{i=0}^{N-1} u_{is} = 6676174; \sum_{i=0}^N w_{spi} = 286; \frac{\sum_{i=0}^{N-1} u_{is}}{\sum_{i=0}^N w_{spi}} = 23343,27$$

W tabeli 18 pokazano wyniki porównawcze uzyskane z obliczeń i symulacji, które potwierdzają słuszność hipotezy, że rozkład wykorzystania krawędzi grafu jest uzależniony od ich liczby występowania w ścieżkach równoległych.

Tabela 18. Wyniki porównawcze uzyskane z symulacji i obliczeń

Numer krawędzi	u_{is}	u_{io}	Numer krawędzi	u_{is}	u_{io}
0	228702	225651,6	13	284288	287900,3
1	284566	287900,3	14	228983	225651,6
2	284413	287900,3	15	284518	287900,3
3	229321	225651,6	16	228660	225651,6
4	228820	225651,6	17	284879	287900,3
5	284509	287900,3	18	228999	225651,6
6	284032	287900,3	19	284366	287900,3
7	228873	225651,6	20	229187	225651,6
8	285658	287900,3	21	283939	287900,3
9	284735	287900,3	22	229155	225651,6
10	228362	225651,6	23	284866	287900,3
11	284337	287900,3	24	229167	225651,6
12	229031	225651,6	25	229808	225651,6

Przy okazji wykonywanych obliczeń stwierdzono, że sumaryczna wartość współczynników w_{spi} jest wartością stałą dla wybranej liczby węzłów tworzących Grafy Referencyjne określonego stopnia. Otrzymane wartości dla grafów trzeciego i czwartego stopnia podano w tabelach 19 i 20.

Tabela 19. Sumaryczne wartości współczynników w_{spi} dla trzeciego stopnia węzłów

Liczba węzłów	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
$\sum w_{spi}$	42	88	150	252	378	528	702	900	1122	1416	1742	2100	2490

$D(G) = 2$	$D(G) = 3$	$D(G) = 4$
------------	------------	------------

Otrzymane wartości $\sum w_{spi}$ są związane ze średnicą grafu i można je wyznaczyć korzystając ze wzorów:

$$\sum w_{spi} = \begin{cases} N(4N - 5) & \text{when } D(G) = 2 \\ 3N(N - 5) & \text{when } D(G) = 3 \\ N(4N - 37) & \text{when } D(G) = 4 \end{cases} \quad (15)$$

Tabela 20. Sumaryczne wartości współczynników w_{spi} dla czwartego stopnia węzłów

Liczba węzłów	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\sum w_{spi}$	36	56	80	108	140	176	216	260	308	360	416	476
$D(G) = 2$												
Liczba węzłów	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$\sum w_{spi}$	558	646	740	840	946	1058	1176	1300	1430	1566	1708	1856
$D(G) = 3$												

$$\sum w_{spi} = \begin{cases} 2N(2N - 3) & \text{when } D(G) = 2 \\ N(3N - 23) & \text{when } D(G) = 3 \end{cases} \quad (16)$$

Zamieszczone powyżej rozważania stały się podstawą dla zaproponowania sposobu sterowania zasobami sieciowymi, co ma na celu uzyskanie poprawy własności przesyłowych sieci modelowanych przy pomocy Grafów Referencyjnych.

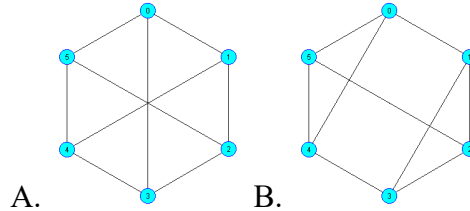
Aby sprawdzić skuteczność omówionego rozwiązania, dokonano modyfikacji algorytmu działania symulatora. Pierwotnie symulacje były wykonywane przy założeniu, że wszystkie użyte krawędzie grafu posiadają te same zasoby transmisyjne. Przez zasób transmisyjny rozumiane są np. liczba szczelin traktu wykorzystywana celem przesyłania informacji użytkowych lub przepustowość łącza. Przyjęto zasadę, że całkowity zbiór zasobów dzielony jest pomiędzy krawędzie zgodnie z ustalonymi na podstawie obliczeń wartościami współczynników w_{spi} . W odniesieniu do sieci rzeczywistych taka sytuacja może zaistnieć w przypadku korzystania z łączy dzierżawionych, gdzie dla wybranych relacji międzywęzłowych, można u operatora określić np. zapotrzebowanie na pasmo.

W kolejnej części artykułu zamieszczono przykładowe wyniki badań symulacyjnych topologii sieciowych modelowanych przy pomocy Grafów Referencyjnych uwzględniających proponowaną modyfikację sterowania zasobami.

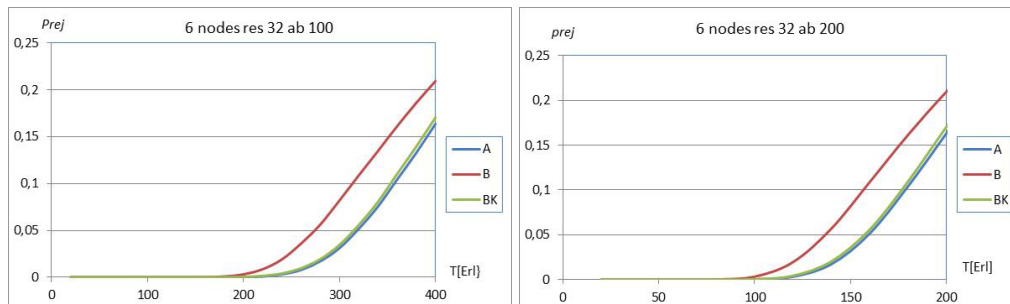
3. Wyniki badań przykładowych sieci opisanych Grafami Referencyjnymi

Aby sprawdzić efekt wprowadzenia zaproponowanej modyfikacji przeprowadzono szereg symulacji dla różnego stopnia i liczby węzłów dla różnych zasobów oraz liczby użytkowników generujących ruch w węzłach. Otrzymane wyniki pokazano na załączonych wykresach.

- Grafy sześciowęzłowe (rys. 10)



Rys. 10. Badane Referencyjne Grafy sześciowęzłowe

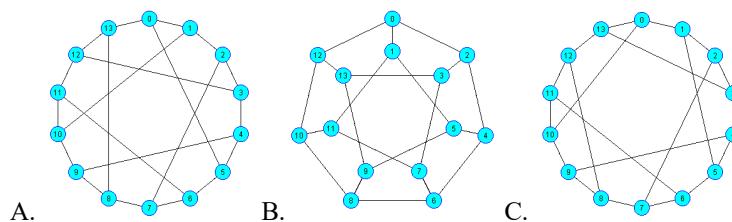


Rys. 11. Wyniki symulacji prawdopodobieństwa odrzucenia realizacji połączenia w funkcji natężenia ruchu

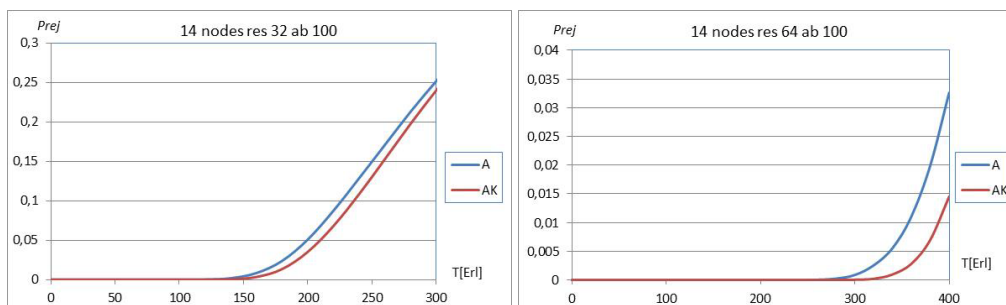
Oznaczenia na wykresach: p_{rej} – prawdopodobieństwo odrzucenia zgłoszenia do realizacji, T – natężenie generowanego ruchu mierzone w Erlangach. A i B – wykresy wyników symulacji otrzymanych przy badaniu odpowiednio grafu A lub B, BK – wyniki symulacji po wprowadzeniu modyfikacji sterowania zasobami.

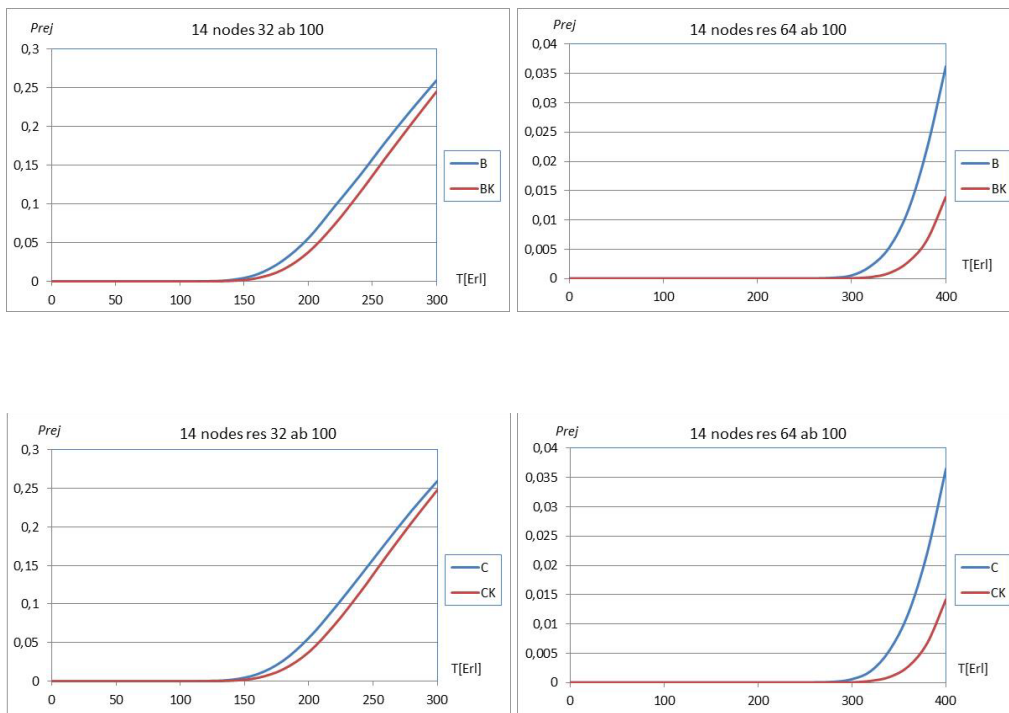
Jak wynika to z wykresów, dzięki wprowadzonej korekcie poprawione zostały parametry transmisyjne grafu B i są one zbliżone do parametrów grafu A (którego współczynniki w_{spi} , posiadają te same wartości, co oznacza jednakowy rozkład użycia krawędzi).

- Grafy Referencyjne czternastowęzłowy trzeciego stopnia (rys. 12).



Rys. 12. Badane Grafy Referencyjne czternastowęzłowe

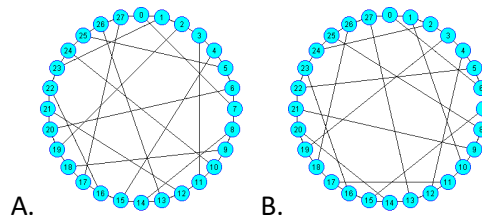




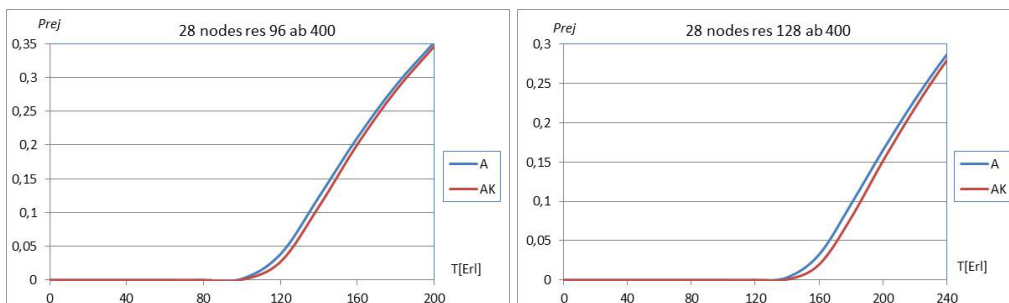
Rys. 13. Wyniki symulacji analizowanych grafów czternastowzeglowych

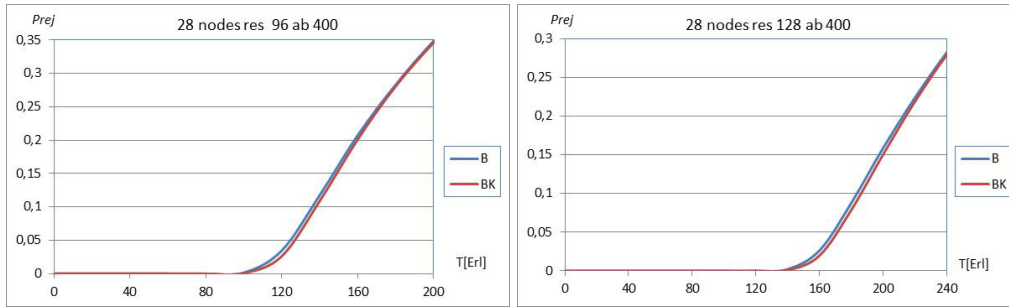
Z podanych wykresów wynika, że zmiany wartości prawdopodobieństwa odrzucenia obsługi zgłoszenia w funkcji natężenia generowanego ruchu dla każdego z Grafów Referencyjnych są analogiczne.

- Grafy Referencyjne dwudziestoosmiowzeglowe trzeciego stopnia (rys. 14)



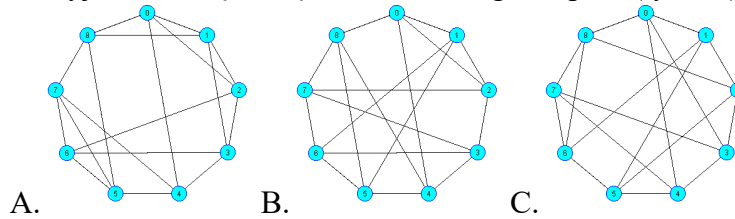
Rys. 14. Referencyjne Grafy dwudziestoosmiowzeglowe



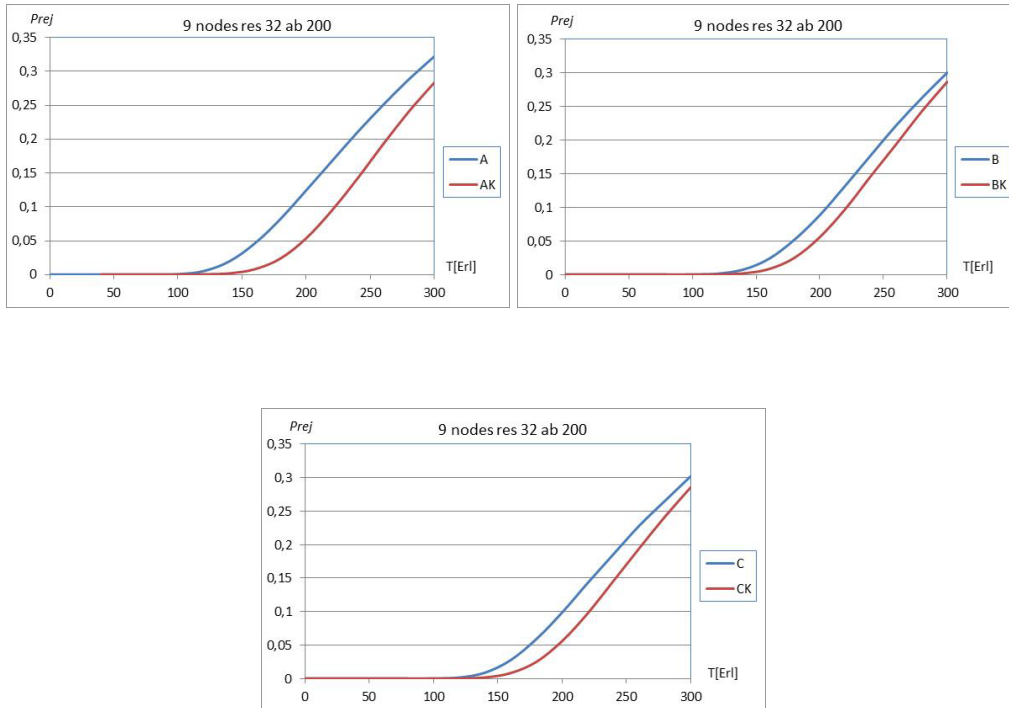


Rys. 15. Wyniki symulacji grafów dwudziestoosiemnowzłowych

- Grafy Referencyjne dziewięciowzłowe czwartego stopnia (rys. 16).



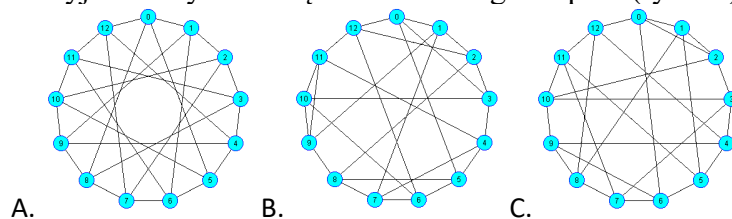
Rys. 16. Analizowane Grafy Referencyjne stopnia czwartego



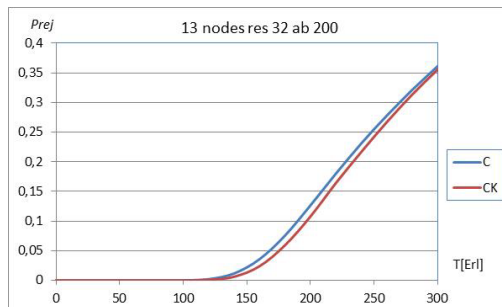
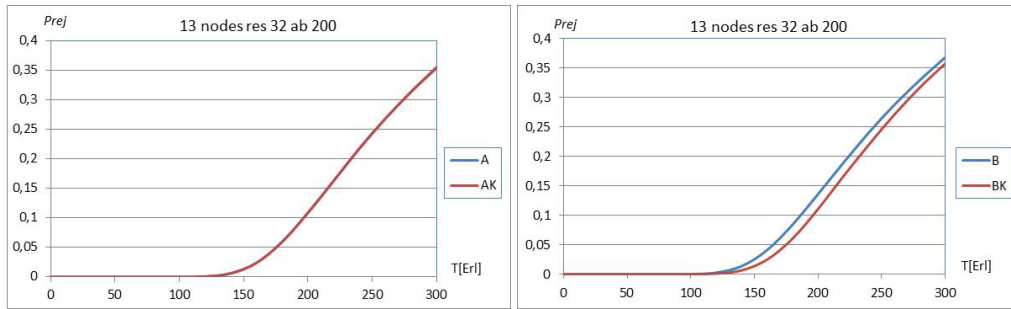
Rys. 17. Wyniki symulacji grafów dziewięciowzłowych czwartego stopnia

Również i w tym przypadku wprowadzenie modyfikacji umożliwiło wyrównanie parametrów transmisyjnych sieci.

- Grafy Referencyjne o trzynastu węzłach czwartego stopnia (rys. 18).

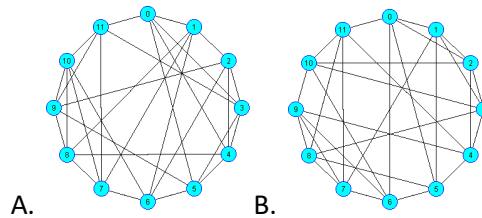


Rys. 18. Analizowane grafy stopnia czwartego

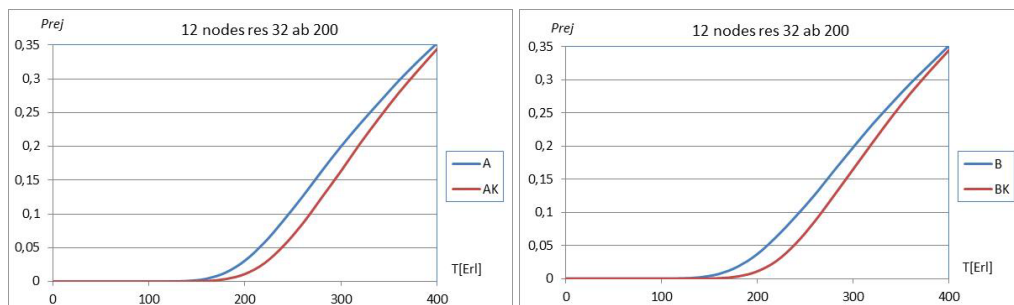


Rys. 19. Wyniki symulacji sieci opisanych grafami dziewięciowęzłowymi czwartego stopnia

- Grafy Referencyjne piątego stopnia o dwunastu węzłach (rys. 20).

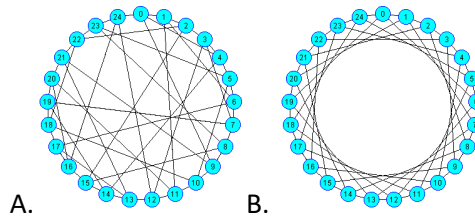


Rys. 20. Analizowane grafy stopnia piątego



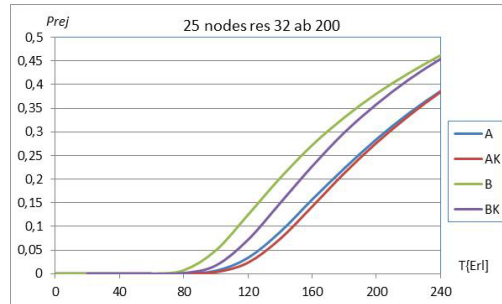
Rys. 21. Otrzymane wyniki symulacji sieci opisanych grafami piątego stopnia

Przeprowadzono również szereg badań, których celem było sprawdzenie, czy podobne wyrównanie własności transmisyjnych można uzyskać w przypadku, gdy sieć opisana jest grafem nie posiadającym własności Grafów Referencyjnych.



Rys. 22. Porównywane grafy dwudziestopięciowęzłowe

Na wykresie (rys. 23) zaprezentowano otrzymane wyniki porównania parametrów transmisyjnych Grafu Referencyjnego A i grafu B (rys. 22).



Rys. 23. Wyniki porównania własności transmisyjnych grafów dwudziestopięciowęzłowych

Zarówno w pierwszym, jak i w drugim przypadku analizowane parametry uległy poprawie, ale znacząca różnica ich wartości pozostała.

Na podstawie przeprowadzonych testów stwierdzono, że suma współczynników w_{spi} w Grafach Referencyjnych dla określonej liczby i stopnia węzłów osiąga wartość minimalną.

W analizowanym przykładzie dla Grafu Referencyjnego wynosi ona 1300, zaś dla grafu B – 1500.

Podsumowując, z przedstawionych dotychczas rozważań i wyników badań nasuwa się następujący wniosek:

Na podstawie przeprowadzonych symulacji stwierdzono, że wprowadzenie modyfikacji sterowania zasobami sieci modelowanych przy pomocy Grafów Referencyjnych (przy założonej liczbie węzłów), wykorzystującej obliczone wartości współczynników w_{spi} , powoduje wyrównanie własności transmisyjnych porównywanych struktur bez względu na ich topologię.

4. Podsumowanie i wnioski

W prezentowanym artykule przedstawiono zagadnienia związane z badaniem własności transmisyjnych sieci opisanych przy pomocy Grafów Referencyjnych. Aby możliwa była realizacja tego zamierzenia został opracowany program symulacyjny, przy czym parametrem będącym miarą wspomnianych wyżej cech sieci, było prawdopodobieństwo odrzucenia realizacji zgłoszenia.

W wyniku przeprowadzonych wcześniej badań stwierdzono, że pomimo jednakowych wartości bazowych parametrów Grafów Referencyjnych, to znaczy - średnicy i średniej długości ścieżki, w niektórych przypadkach ich wartości parametrów transmisyjnych różniły się między sobą. Stwierdzenie tego faktu stało się punktem wyjścia do poszukiwania czynników mogących mieć wpływ na to zjawisko. Założono, że takim elementem może być liczba wykorzystania poszczególnych krawędzi grafu. Opracowane zostało narzędzie

programowe umożliwiające wyznaczenie tej liczby. Na podstawie uzyskanych rezultatów określono maksymalną liczbę użycia dowolnej krawędzi w zależności od średnicy grafu oraz stopnia węzłów. Podano formułę określającą sumaryczną liczbę ścieżek o zadanej długości, w której skład wchodzi dana krawędź. Na podstawie przeprowadzonej analizy zdefiniowano ogólny wzór na wielomiany opisujące rozkłady użycia krawędzi w funkcji średnicy i stopnia grafów. Ponieważ otrzymane rezultaty obliczeń dawały wyniki sumaryczne wykorzystania krawędzi we wszystkich ścieżkach minimalnej długości, a każda z nich może być wykorzystywana wielokrotnie, zaproponowano dwa algorytmy umożliwiające znalezienie wszystkich najkrótszych, równoległych dróg łączących dwa dowolnie wybrane węzły.

W trakcie prowadzonych symulacji stwierdzono występowanie nierównomiernego wykorzystania poszczególnych krawędzi grafów opisujących sieci. Analiza uzyskanych wyników pozwoliła na stwierdzenie, że wpływ na powstanie tego zjawiska ma liczba ścieżek równoległych, których elementami są konkretne krawędzie. Zdefiniowano i określono wzorem współczynnik w_{spi} , który wykorzystano w proponowanej metodzie wyrównywania korzystania z zasobów sieciowych przez krawędzie częściej wykorzystywane do transmisji informacji.

W zakończeniu zamieszczono przykładowe wyniki badań dokumentujące przeprowadzone rozważania, na podstawie których stwierdzono, że wprowadzenie modyfikacji sterowania zasobami sieciowymi poprawia własności transmisyjne sieci modelowanych przy pomocy Grafów Referencyjnych i eliminuje konieczność doboru konkretnej struktury, gdyż dzięki jej zastosowaniu wszystkie one posiadają zbliżone cechy.